Université de Bourgogne
Département de Mathématiques - L3 Janvier 2020

CALCUL DIFFERENTIEL - EXAMEN CORRIGÉ (3 heures)

Les exercices sont indépendants, et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. La rédaction et la clarté des arguments seront prises en compte dans la notation.

I *(6 pts)*

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = y^3 + xy^2 + x^2y - 1$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $y > 0$ tel que $f(x,y) = 0$. On note $\varphi(x)$ ce nombre. D'une part, pour tout $x \in \mathbb{R}_*$, $f(x,0) = -1 < 0$ et $\lim_{y\to+\infty} f(x,y) = +\infty$. De plus $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 + 2xy + x^2$, dont le déterminant par rapport à y est $\Delta(x) = 4x^2 - 12x^2 < 0$. Donc, en tant que fonction de y, $f(x,y)$ est strictement croissante. Si $x = 0$, $f(0,y) = y^3 - 1$ est strictement croissante de -1 jusqu'à $+\infty$. Le résultat résulte du Théorème des valeurs intermédiaires.
2. Montrer que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$. En tout point $(x, \varphi(x))$ du graphe de φ, la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est strictement positive, car $y > 0$. La réponse à la question résulte donc du Théorème des fonctions implicites.
3. Montrer que φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. En dérivant la relation $f(x,\varphi(x)) = \varphi(x)^3 + x\varphi(x)^2 + x^2\varphi(x) - 1 = 0$, on trouve $3\varphi(x)^2\varphi'(x) + \varphi(x)^2 + 2x\varphi'(x)\varphi(x) + 2x\varphi(x) + x^2\varphi'(x) = 0$, et donc
$$\varphi'(x) = -\frac{\varphi(x)^2 + 2x\varphi(x)}{3\varphi(x)^2 + 2x\varphi(x) + x^2} < 0 \text{ pour tout } x > 0.$$
4. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$. Il résulte de l'étude précédente que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ avec $y > 0$, on a $\varphi(x) < y \Leftrightarrow f(x,y) > 0$. Soit $\varepsilon > 0$. On a $f(x,\varepsilon) = \varepsilon^3 + x\varepsilon^3 + x^2\varepsilon - 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc $0 < \varphi(x) < \varepsilon$ pour x assez grand.
5. Montrer que $\varphi(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$. Il s'agit de montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $x^2(1-\varepsilon) < \varphi(x) < x^2(1+\varepsilon)$ pour x assez grand. Or
$$f\left(x, x^2(1+\varepsilon)\right) = x^{-6}(1+\varepsilon)^3 + x^{-3}(1+\varepsilon)^2 + (1+\varepsilon) - 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \varepsilon > 0$$
et
$$f\left(x, x^2(1-\varepsilon)\right) = x^{-6}(1-\varepsilon)^3 + x^{-3}(1-\varepsilon)^2 + (1-\varepsilon) - 1 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\varepsilon < 0.$$
Ce qui démontre le résultat voulu.

II *(9 pts)*

On considère l'application $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ définie par :
$$\varphi(x,y) = \left(\sin\left(\frac{y}{2}\right) - x, \sin\left(\frac{x}{2}\right) - y\right).$$

1. Montrer que φ est un difféomorphisme local en tout point de $\mathbb{R}^2$. On calcule le déterminant jacobien $\begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{2}\cos\left(\frac{y}{2}\right) \\ \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) & -1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{1}{4}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{y}{2}\right) > 0$. On applique donc en tout point le théorème d'inversion locale.

2. Montrer que $\varphi(\mathbb{R}^2)$ est un ensemble ouvert. Soit $b \in \varphi(\mathbb{R}^2)$ et soit $a \in \mathbb{R}^2$ un antécédent de b. Puisque φ est un difféomorphisme local, il existe un voisinage U de a et un voisinage V de b tels que $\varphi : U \to V$ soit un difféomorphisme. Donc $V \subset \varphi(\mathbb{R}^2)$. De plus, l'ensemble $\varphi(\mathbb{R}^2)$ est un voisinage de chacun de ses points, c'est donc un ensemble ouvert.
3. Montrer que pour tous $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ avec $u_1 < u_2$, il existe $u \in]u_1, u_2[$ tel que
$$\sin\left(\frac{u_2}{2}\right) - \sin\left(\frac{u_1}{2}\right) = \frac{1}{2}(u_2 - u_1)\cos\left(\frac{u}{2}\right).$$
C'est une application directe du théorème des accroissements finis (en une variable) appliqués à la fonction $u \mapsto \sin\left(\frac{u}{2}\right)$.
4. En déduire que φ est injective. Soient deux points (x_1, x_2) et (y_1, y_2) de $\mathbb{R}^2$ tels que $\varphi(x_1, x_2) = \varphi(y_1, y_2)$. On a :
$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{y_1}{2}\right) - x_1 &= \sin\left(\frac{y_2}{2}\right) - x_2 \\ \sin\left(\frac{x_1}{2}\right) - y_1 &= \sin\left(\frac{x_2}{2}\right) - y_2, \end{aligned}$$
c'est à dire :
$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{y_1}{2}\right) - \sin\left(\frac{y_2}{2}\right) &= x_1 - x_2 \\ \sin\left(\frac{x_1}{2}\right) - \sin\left(\frac{x_2}{2}\right) &= y_1 - y_2. \end{aligned}$$
Si $x_1 = x_2$, alors $y_1 = y_2$ et réciproquement. Supposons $x_1 \neq x_2$ (et donc $y_1 \neq y_2$). D'après la question précédente, il existe $u \in]x_1, x_2[$ et $v \in]y_1, y_2[$ tels que :
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(y_1 - y_2)\cos\left(\frac{v}{2}\right) &= x_1 - x_2 \\ \frac{1}{2}(x_1 - x_2)\sin\left(\frac{u}{2}\right) &= y_1 - y_2. \end{aligned}$$
On en déduit $|x_1 - x_2| < |y_1 - y_2| < |x_1 - x_2|$, ce qui est impossible. Donc $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$. L'application φ est injective.
5. Montrer que $\varphi(\mathbb{R}^2)$ est fermé. Il s'agit de montrer que si une suite de points de $\varphi(\mathbb{R}^2)$ converge, alors sa limite appartient à $\varphi(\mathbb{R}^2)$. On écrit $\varphi = -\mathrm{Id} + \varepsilon$, avec $\varepsilon(x, y) = \left(\sin\left(\frac{y}{2}\right), \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)$. D'après la question 3), $\|\varepsilon(x, y) - \varepsilon(x_1, y_1)\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|(x, y) - (x_1, y_1)\|_\infty$. Donc, si $p_n = (x_n, y_n)$ est une suite de points de $\mathbb{R}^2$ telle que la suite $(\varphi(p_n))$ converge - et donc est de Cauchy -, on a $\|\varphi(p_n) - \varphi(p_m)\|_\infty \geq \|p_n - p_m\|_\infty$. La suite (p_n) est donc également une suite de Cauchy, qui tend vers le point $q \in \mathbb{R}^2$. Par continuité, la limite de la suite $\varphi(p_n)$ est donc le point $\varphi(q)$, qui appartient à $\varphi(\mathbb{R}^2)$.
L'ensemble $\varphi(\mathbb{R}^2)$ est bien un ensemble fermé.
6. En déduire que φ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. L'ensemble $\varphi(\mathbb{R}^n)$ est un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}^2$, à la fois ouvert et fermé d'après les questions 2) et 5). Il est donc égal à $\mathbb{R}^2$ (on rappelle que $\mathbb{R}^2$ est connexe : les seuls sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^2$ à la fois ouverts et fermés sont $\mathbb{R}^2$ et l'ensemble vide). Ainsi, φ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. L'application φ est donc une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ qui est un difféomorphisme local en tout point, c'est donc un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

III *(5 pts)*

On considère le système de deux équations à trois inconnues

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$
$$x^3 - y^3 + z^3 = 1\,.$$

On pose $f(x,y,z) = (x^2 + y^2 - z^2 - 1, x^3 - y^3 + z^3 - 1)$.

1. Vérifier que le point $A = (2, -1, -2)$ appartient à V. Calcul direct.
2. Montrer qu'il existe deux fonctions φ et ψ de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur un voisinage U de -2 telles que, pour tout $z \in V$, $(\varphi(z), \psi(z), z)$ est solution du système. On calcule le déterminant jacobien du système d'équations par rapport aux variables x et y en un point (x,y,z) :

   $$J_{(x,y)}f = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 3x^2 & -3y^2 \end{vmatrix} = -6xy^2 - 6x^2y = -6xy(y+x)\,.$$

   On a $J_{(x,y)}f(A) = 12 \neq 0$. Le résultat découle de l'application du Théorème des fonctions implicites appliqué au système d'équations au point A.
3. Calculer $\varphi'(-2)$ et $\psi'(-2)$. Une façon de procéder est la suivante. On écrit les équations satisfaites par φ et ψ au voisinage de $z = -2$:

   $$\varphi(z)^2 + \psi(z)^2 - z^2 = 1$$
   $$\varphi(z)^3 - \psi(z)^3 + z^3 = 1$$

   Donc, en dérivant par rapport à z, on trouve :

   $$\varphi'(z)\varphi(z) + \psi'(z)\psi(z) - z = 0$$
   $$\varphi'(z)\varphi(z)^2 - \psi'(z)\psi(z)^2 + z^2 = 0\,.$$

   Donc, au point $z = -2$, on a :

   $$2\varphi'(-2) - \psi'(-2) = -2$$
   $$4\varphi'(-2) - \psi'(-2) = -4\,,$$

   d'où l'on tire $\varphi'(-2) = -1$ et $\psi'(-2) = 0$.
4. Déterminer l'espace tangent à V au point A. Puisque V est localement paramétré par $z \mapsto (\varphi(z), \psi(z), z)$ au voisinage de $z_0 = -2$, l'espace tangent est la droite passant par le point A et dirigée par le vecteur $(\varphi'(-2), \psi'(-2), 1) = (-1, 0, 1)$.